中国农业大学

2020~2021学年秋季学期

实变函数（A卷） 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、证明下列集合关系（第1题6分，第2题9分，共15分）

1、证明$(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha})^C = \bigcap_{\alpha}(E_{\alpha}^C)$，其中$E_{\alpha}^C$表示集合$E_{\alpha}$在基本集$X$中的补集.

2、证明$(E_1 - E_2) - (E_3 - E_4) \subseteq (E_1 - E_3) \cup (E_4 - E_2)$.

二、简答题（第1题12分，第2题13分，共25分）

1、勒贝格积分是实变函数中最基本的定义之一，试给出勒贝格积分的定义过程，并解释勒贝格积分存在和可积的含义.

2、设$f_n(x)$是有界可测集E上的可测函数列，$f(x)$是E上的可积函数，试解释$f(x)$具有积分的绝对连续性的含义，和$f_n(x)$具有等度的绝对连续积分的含义，并指出两者的区别.

三、解答题（每题10分，共40分）

1、试判断以测度收敛能否推出几乎处处收敛并说明理由（如果能请给出证明，如不能请举例说明）.

2、(勒贝格控制收敛定理) 设E是可测集，设$f_n(x)$是E上的可测函数列，$f_n(x)$的极限存在且$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，且有可积函数$g(x)$使得

$$|f_n(x)| \le g(x), \quad (x \in E; n \in \mathbb{N}),$$

则$f(x)$可积且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m .$$

考生诚信承诺

1. 本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。

2. 本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：___________ 班级：_________ 学号：___________________姓名：____________

3、若E是有界可测集，（1）试判断函数空间L 和L^1的关系并简要说明理由；（2）试判断函数空间L^{16}和L^1的包含关系并给出证明.

4、将整系数多项式的全体记为集合E，试判断E是否为可列集并给出理由.

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、设f_+和f_-分别为函数f的正部和负部，试证明下列各式：

（1）$[f+g]_+ \leqslant f_+ + g_+$

（2）$[f+g]_- \leqslant f_- + g_-$

（3）$|f-g| \geqslant (f_+ - g_+) + (f_- - g_-)$

2、设可测函数列$f_n(x)$在$[a,b] \subseteq R$上依测度收敛于$f(x)$，且g是R上的连续函数，试证明$g[f_n(x)]$在$[a,b]$上依测度收敛于$g[f(x)]$.