中国农业大学

2021~2022 学年秋季学期

实变函数（A 卷） 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、证明题（第 1 题 6 分，第 2 题 9 分，共 15 分）

1、证明$(A-B)\bigcap(C-D)=(A\bigcap C)-(B\bigcup D)$，其中$A,B,C,D$是任意给定的集合.

2、试判断$\boldsymbol{N}^2$与$\boldsymbol{N}$之间是否对等并给出理由，其中$\boldsymbol{N}$是自然数集.

二、简答题（第 1 题 10 分，第 2 题 15 分，共 25 分）

1、给定实数空间R中的有界点集E，试用构造方法给出集合E的测度的定义过程.

2、康托尔(G. Cantor)三分集是一个很重要的闭集，（1）给定基本区间$[0,1]$，试给出 Cantor 三分集的构造过程；（2）证明 Cantor 三分集是一个不可列集.

三、解答题（每题 10 分，共 40 分）

1、设$\{E_n\}$是R中的可列集合列，且每个E_n均为零测度集，试证明$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$是一个零测度集.

2、(里斯定理) 设E是可测集，且$mE<\infty$，设$f_n(x)$是E上的可测函数列，$f_n(x)$以测度收敛于可测函数$f(x)$的充要条件是：对$f_n(x)$的任意子列$f_{n_k}(x)$，都存在子列$f_{n_{k_i}}(x)$，几乎处处收敛于$f(x)$.

考生诚信承诺

1．本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。
2．本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：___________ 班级：_________ 学号：___________________姓名：____________

3、若E是有界可测集，（1）给出L^p的定义；（2）试判断函数空间L^3和L^1的包含关系并给出证明.

4、设函数$f(x)$是可测集E上的(勒贝格)可积函数，令$E_n=E(|f|\geqslant n)$，试证明：

$$\lim_{n\to\infty} mE_n=0.$$

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、设E是可测集，且$mE<\infty$，$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列，试证明$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$是$E$上的可测函数..

2、设E是可测集，$\{f_n(x)\}$是E上的非负可测函数，$f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$在E上恒成立（其中$n=1,2,\ldots$），$\{f_n(x)\}$是E上收敛于$f(x)$，且有正整数n_0，使$\int_E f_{n_0}(x)\mathrm{d}x<+\infty$，即$f_{n_0}(x)$在$E$上可积. 试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$