中国农业大学

2022~2023 学年秋季学期

实变函数（A 卷） 课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、证明题（第 1 题 9 分，第 2 题 6 分，共 15 分）

1、$(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)^C = \bigcup\limits_{\alpha}(A_\alpha^C)$，其中 A_α^C 表示集合 A_α 在基本集 X 中的补集.

2、证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

二、简答题（第 1 题 10 分，第 2 题 15 分，共 25 分）

1、试判断闭区间 $[0,1]$ 是否为可列集，并说明理由.

2、勒贝格(Lebesgue)积分是实变函数的核心概念之一，给定实数空间 R，试用构造法给出可测函数 $f(x)$ 在有界可测集 E 上的勒贝格积分的定义过程.

三、解答题（每题 10 分，共 40 分）

1、设 $f(x)$ 是由 R 上的单调函数，E 是 $f(x)$ 的所有不连续点构成的集合，试证明 E 至多可列.

2、(Fatou 定理)设 $f_n(x)$ 是有界可测集 E 上的非负可测函数列，试证明：

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

考生诚信承诺

1. 本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。
2. 本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：____________ 班级：__________ 学号：____________________ 姓名：_____________

3、若E是有界可测集，（1）给出函数空间L^1的定义；（2）试判断函数空间L^7和L^1的包含关系，并给出证明.

4、设$f(x)$是可测集E上的可积函数， 对于任意有界可测函数$\varphi(x)$，都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}m = 0,$$

试证明$f(x)\sim 0$，即$f(x)$在E上几乎处处等于0.

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、康托尔(G. Cantor)三分集P_0是基本区间$[0,1]$中的一个常用的闭集，(1)给出P_0的构造过程；(2)设G_0是P_0在$[0,1]$中的补集，设$f(x)$是$[0,1]$上的一个分段函数，$f(x)$在P_0上的函数值为 0，$f(x)$在G_0中的长度为$\dfrac{1}{3^n}$的构成区间上的函数值为n，试证$f(x)$是$[0,1]$上的 Lebesgue 可积函数，并求其积分值.

2、设E是可测集，$f(x)$，$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是E上的非负可测函数，若$f_n(x)$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$，试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0 .$$