中国农业大学

2023~2024 学年秋季学期

实变函数（A卷）课程考试试题

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、证明题（第 1 题 7 分，第 2 题 8 分，共 15 分）

1、集合A,B的**对称差**定义为 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. 证明集合的交与对称差满足分配律, 即任取三个集合 A, B, C, 有 $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

2、证明可列多个零测集的并仍是零测集.

二、简答题（第 1 题 15 分，第 2 题 10 分，共 25 分）

1、请叙述对集合 $E \subset \mathbb{R}$ 可测性进行判别的卡拉泰奥多里 (C. Carathéodory) 条件，并对集合 E 有界 ($E \subset (a, b)$区间) 的情况进行证明.

2、Vitali 覆盖引理是证明变上限积分及其微分相关结论的有力工具. 请叙述集合 $E \subset \mathbb{R}$ 的 Vitali 覆盖的定义, 以及当E有界时的 Vitali 覆盖引理 (不需要证明).

三、解答题（每题 10 分，共 40 分）

1、设 F_1, F_2 为 $\mathbb{R}$ 中两个**非空有界闭集**, 且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

(1). 证明 $\rho(F_1, F_2) \coloneqq \inf\limits_{x \in F_1, y \in F_2} |x - y| > 0$.

(2). 证明存在开集 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$, 满足 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

2、设 f 是可测集 E 上的函数, D 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集, 若对任意 $\alpha \in D$, $E(f > \alpha)$ 都是可测集, 请问 f 是否必然是可测函数? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

3、叙述可测集$E \subset \mathbb{R}$上的可测函数列 $\{f_n\}$ 依测度收敛到可测函数 f 的定义, 并给出依测度收敛, 但不几乎处处收敛的可测函数列的例子.

考生诚信承诺

1.　本人清楚学校关于考试管理、考场规则、考试作弊处理的规定，并严格遵照执行。

2.　本人承诺在考试过程中没有作弊行为，所做试卷的内容真实可信。

学院：_____ 班级：____ 学号：________姓名：

4、积分序列的 Levi 定理说的是: 对于定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的渐升非负可测函数列 $\{f_n\}$, 若存在可测函数 f, 使得 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 在 E 上恒成立, 那么积分和极限可交换次序, 即 $\int_E f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm$. 若去掉函数列 $\{f_n\}$ 非负性这一条件, 请问 Levi 定理是否仍成立? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例, 并添加上一条使之成立的条件 (不能添加"渐升函数列$\{f_n\}$从某一项开始都非负"的条件).

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、设$E \subset \mathbb{R}$ 可测, $1 \le p \le \infty$, L^p空间为E上p幂可积函数全体构成的空间.

(1). 证明 L^p 空间是线性空间.

(2). 设 $mE < \infty$ 且 $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, 证明 $L^{p_2} \subset L^{p_1}$.

2、设 $P_0 \subset [0,1]$ 为 Cantor 三分集，它是从 $[0,1]$ 区间归纳地构造得来的: 第 1 步从 $[0,1]$ 区间中去掉正中间长为 $\frac{1}{3}$ 的开区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 得到两个闭区间 $[0, \frac{1}{3}]$ 与 $[\frac{2}{3}, 1]$; 此后的第 $k+1$ 步, 对上一步得到的2^k个闭区间, 去掉每个闭区间正中间长为 $\frac{1}{3^{k+1}}$ 的开区间. 最终我们得到的集合为 Cantor 三分集.

(1). 证明 P_0 是闭集, 不可列, 并且具有零测度.

(2). 已知 P_0 中的元素可以唯一地表示为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}, a_n \in \{0,1\}$, 定义函数

$$\phi: P_0 \to [0,1],\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

以及 Cantor 函数

$$\Phi: [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \sup_{y \le x, y \in P_0} \phi(y).$$

证明 Cantor 函数 Φ 连续, 有几乎处处为 0 的导数, 但不是绝对连续函数.