# 中国农业大学

# 2024~2025 学年秋季学期

# 实变函数 课程考试试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 分数 | | | | | |

（本试卷共 4 道大题）

**考生诚信承诺**

本人承诺自觉遵守考试纪律，诚信应考，服从监考人员管理。

本人清楚学校考试考场规则，如有违纪行为，将按照学校违纪处分规定严肃处理。

**一、证明题：本题共 2 小题，第 1 题 7 分，第 2 题 8 分，共 15 分。请写出证明详细过程。**

1.（7 分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为黎曼可积函数, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=0$.

2.（8 分）请证明 $\mathbb{R}$ 中非空有界开集 $G$ 的结构表示定理, 即它能被表示为至多可列多个互不相交的构成区间之并: $G=\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$.

**二、简答题：本题共 2 小题，第 1 题 10 分，第 2 题 15 分，共 25 分。**

1.（10 分）请问 $\mathbb{R}$ 中勒贝格**不可测集**是否存在? 如果不存在, 请给出证明; 如果存在, 请给一个具体的例子 (**不需要**进一步证明它是勒贝格不可测的).

2.（15 分）设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 定义点 $x$ 到 $E$ 的距离为

$$\rho(x,E)=\inf\{\|x-y\|:\ y\in E\},$$

其中 $\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

（1）设 $F$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集, 证明存在 $y_0\in F$, 使得 $\rho(x,F)=\|x-y_0\|$.

（2）设 $F_1,F_2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 请构造一个 $\mathbb{R}^n$ 上的**连续函数** $f(x)$, 同时满足以下两个条件

（a）$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

（b）$f(x)$ 在 $F_1$ 上取值恒等于 0, 在 $F_2$ 上取值恒等于 1.

（3）设 $F_1,F_2,F_3$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中三个互不相交的非空闭集, 请构造一个 $\mathbb{R}^n$ 上的**连续函数** $f(x)$, 同时满足以下两个条件

（a）$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

（b）$f(x)$ 在 $F_1$ 上取值恒等于 0, 在 $F_2$ 上取值恒等于 $\dfrac{1}{2025}$, 在 $F_3$ 上取值恒等于 1.

学院：____________ 班级：____________ 学号：_________________ 姓名：____________

**三、解答题：本题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分。请写出具体解题步骤。**

1.（10 分）设 $f$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

（1）请叙述闭区间 $[a,b]$ 上绝对连续函数的定义.

（2）任取 $Z \subset [a,b]$ 为零测集, 请问 $Z$ 的像集 $f(Z)$ 是否必然也是零测集? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

2.（10 分）请叙述可测集 $E$ 上可测函数的定义, 并证明: 若 $f(x), g(x)$ 是 $E$ 上可测函数, 并且 $f(x) > 0$, 那么 $h(x) := f(x)^{g(x)}$ 也是可测函数.

3.（10 分）设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, 请问两个关系式

$$L^p(E) \subset L^q(E), \quad L^q(E) \subset L^p(E)$$

是否必成立其一? 若是, 请证明; 若否, 请举反例.

4.（10 分）设 $f, f_n \in L^p(E), n \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty, E$ 是可测集. 请分别叙述

（1）$\{f_n\}$ 依测度收敛于 $f$;

（2）$\{f_n\}$ 依范数收敛于 $f$

的定义. 请问这两个概念是否有包含关系? 若有, 请给出证明; 若无, 请给出反例.
注意, 这里说的某概念 (相关事物的全体记作 $A$) 包含另一个概念 (相关事物的全体记作 $B$) 指的是, $A \supset B$.

**四、证明题：本题共 2 小题，每题 10 分，共 20 分。请写出详细证明过程。**

1.（10 分）已知对于任意非奇异线性变换 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 以及任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $m(T(E)) = |\det T| \cdot mE$, 这里的 $m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度 (**注意, 这是题目给的已知结论, 不需要你证明**).
现设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 即 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上勒贝格可积函数, $a > 0$ 为常数.

（1）证明非负数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-a} |f(nx)| \, \mathrm{d}x$ 收敛.

（2）证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-a} f(nx) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立.

2.（10 分）设基本集为 $X = \mathbb{R}^n$, 以下我们考虑的集合都是它的子集.

（1）请证明勒贝格外测度的正则性: 对任意集合 $E \subset X$, 存在 $G_\delta$-集 $A$, 使得 $A \supset E$ 且 $mA = m^*E$.

（2）对于某个集合 $E \subset X$, 若存在勒贝格可测集 $E_0 \supset E$, 满足 $mE_0 < \infty$ 与 $mE_0 = m^*E + m^*(E_0 \setminus E)$, 请证明 $E$ 必然也是勒贝格可测集.