中国农业大学

2024~2025 学年秋季学期

实变函数 课程考试试题解答

一、证明题：本题共 2 小题，第 1 题 7 分，第 2 题 8 分，共 15 分。请写出证明详细过程。

1.（7 分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为黎曼可积函数, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=0$.

解答 由函数黎曼可积的勒贝格判别法知, f 在定义域 $[0,1]$ 上有界且几乎处处连续. 由于 f 有界, 不妨设 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall\, x\in[0,1]$. 于是在 $[0,1]$ 上, $f(x)x^n$ 也有界, 即 $|f(x)x^n|\leqslant M$, 且几乎处处连续, 从而是黎曼可积的. 黎曼可积函数的黎曼积分与勒贝格积分相等, 于是我们对勒贝格积分证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f(x)x^n\mathrm{d}x=0$ 即可.

由于 f 在 $[0,1]$ 上勒贝格可积当且仅当 $|f|$ 勒贝格可积. 另一方面, 在 $[0,1]$ 上恒有

$$|f(x)x^n|\leqslant|f(x)|\leqslant M,$$

于是由勒贝格控制收敛定理 (或者有界收敛定理) 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f(x)x^n\,\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty}f(x)x^n\,\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ f(1), & x=1.\end{cases}\,\mathrm{d}x=0.$$

□

2.（8 分）请证明 $\mathbb{R}$ 中非空有界开集 G 的结构表示定理, 即它能被表示为至多可列多个互不相交的构成区间之并: $G=\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$.

解答 任取 $x_0\in G$, 考虑

$$\alpha=\inf\{x\in G\ :\ (x,x_0)\subset G\},$$

$$\beta=\sup\{y\in G\ :\ (x_0,y)\subset G\}.$$

由于 G 是开集, x_0 是内点, 以上集合非空, 从而 α,β 都是良定义的. 容易证明 $(\alpha,\beta)\subset G$, 于是 G 可表示为这样的开区间之并, 并且这些开区间互不相交. 从每一个这样的开区间中取一个有理数, 那么得到了这些开区间之集到有理数集的一个单射, 从而这些开区间至多可列. □

二、简答题：本题共 2 小题，第 1 题 10 分，第 2 题 15 分，共 25 分。

1.（10 分）请问 $\mathbb{R}$ 中勒贝格**不可测集**是否存在? 如果不存在, 请给出证明; 如果存在, 请给一个具体的例子 (**不需要**进一步证明它是勒贝格不可测的).

解答 存在.
具体例子 (任写一个即可, 包括但不限于如下):

(1). 考虑等价类 $[0,1)/\sim$, 其中等价关系 $\sim$ 定义为 $x\sim y\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$. 从每一类中取一个代表元, 那么这些代表元构成的集合 E 就是一个勒贝格不可测集.

□

2.（15 分）设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集, 定义点 x 到 E 的距离为

$$\rho(x,E)=\inf\{\|x-y\|:\ y\in E\},$$

其中 $\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

（1） 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭集, 证明存在 $y_0\in F$, 使得 $\rho(x,F)=\|x-y_0\|$.

（2） 设 F_1,F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 请构造一个 $\mathbb{R}^n$ 上的**连续函数** $f(x)$, 同时满足以下两个条件

（a）$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

（b）$f(x)$ 在 F_1 上取值恒等于 0, 在 F_2 上取值恒等于 1.

（3） 设 F_1,F_2,F_3 为 $\mathbb{R}^n$ 中三个互不相交的非空闭集, 请构造一个 $\mathbb{R}^n$ 上的**连续函数** $f(x)$, 同时满足以下两个条件

（a）$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

（b）$f(x)$ 在 F_1 上取值恒等于 0, 在 F_2 上取值恒等于 $\dfrac{1}{2025}$, 在 F_3 上取值恒等于 1.

解答

（1） 若 $x\in F$, 则取 $y_0=x$ 即可. 下设 $x\notin F$.

取闭球 $\overline{B}=\overline{B}(x,\delta)$ 使得 $\overline{B}\cap F\neq\emptyset$. 这样的 $\delta>0$ 总是可以取到的. 这是因为 F 是非空集合, 可以任取其中一点 $y\in F$, 并令 $\delta=\|x-y\|>0$. 容易看出

$$\rho(x,y)\geqslant\delta,\ \ \forall y\in F\setminus\overline{B},$$

$$\rho(x,y)\leqslant\delta,\ \ \forall y\in F\cap\overline{B}.$$

$\overline{B}\cap F$ 是有界闭集, 从而是紧集, 关于 x 的连续函数 $\rho(x,F)$ 在其上能取到最小值, 即存在 $y_0\in F$, 使得 $\rho(x,F)=\rho(x,F\bigcap\overline{B})=\|x-y_0\|$.

这题也可以利用书上的证明方法, 即取 F 点列 $\{y_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\rho(x,y_n)=\rho(x,F)$. 这可以说明 $\{y_n\}$ 是有界点列, 从而存在收敛子列, 而 F 是闭集, 该收敛子列收敛到 F 中的某点, y_0 即取为该点.

（2） 由于 F_1,F_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 那么 $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, $\rho(x,F_1),\rho(x,F_2)$ 不同时为 0, 否则根据第 (1) 问, 存在 $y_1\in F_1, y_2\in F_2$, 使得

$$0=\|x-y_1\|=\|x-y_2\|,$$

那么会有 $x=y_1$ 以及 $x=y_2$, 于是 $x\in F_1\cap F_2$, 这与 F_1,F_2 不交的已知条件矛盾.

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},\ \ x\in\mathbb{R}^n$$

由于 $\rho(x,F_1),\rho(x,F_2)$ 都是关于 x 的连续非负函数, 且分母恒大于 0, 因此 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 由于

$$0\leqslant\rho(x,F_1)\leqslant\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2),$$

因此 $0\leqslant f(x)\leqslant 1,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n$.

对于 $x\in F_1$, 有 $\rho(x,F_1)=0$, 从而有

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}=\frac{0}{0+\rho(x,F_2)}=0;$$

对于 $x\in F_2$, 有 $\rho(x,F_2)=0$, 从而有

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+0}=1.$$

（3） 由于 F_2,F_3 为 $\mathbb{R}^n$ 中不交的非空闭集, 由第 (2) 问知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$, 满足

$0\leqslant g(x)\leqslant 1,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

$g(x)$ 在 F_2 上取值恒等于 0, 在 F_3 上取值恒等于 1.

考虑 F_1 与 $F_2\cup F_3$, 由已知条件, 他们是 $\mathbb{R}^n$ 中两个不交的非空闭集, 那么再次利用第 (2) 问, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $h(x)$, 满足

$0\leqslant h(x)\leqslant 1,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n$;

$h(x)$ 在 F_1 上取值恒等于 0, 在 $F_2\cup F_3$ 上取值恒等于 1.

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$ 如下

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2025}h(x)(1+2024\cdot g(x))\\&=\frac{1}{2025}\cdot\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2\cup F_3)}\cdot\left(1+\frac{2024\cdot\rho(x,F_2)}{\rho(x,F_2)+\rho(x,F_3)}\right)\end{aligned}$$

容易验证函数 $f(x)$ 满足题设条件.

注意, 这题不要忘了 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 的前提条件.

$f(x)$ 其他可行的例子包括:

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1\cup F_2)+\rho(x,F_1\cup F_3)}{\rho(x,F_1\cup F_2)+2025\rho(x,F_1\cup F_3)+\rho(x,F_2\cup F_3)}$$

□

三、解答题：本题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分。请写出具体解题步骤。

1.（10 分）设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

（1） 请叙述闭区间 $[a,b]$ 上绝对连续函数的定义.

（2） 任取 $Z\subset[a,b]$ 为零测集, 请问 Z 的像集 $f(Z)$ 是否必然也是零测集? 若是, 请给出证明; 若否, 请给出反例.

解答

（1） 闭区间 $[a,b]$ 上绝对连续函数的定义: 称定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f 是绝对连续的, 若对任意 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得对 $[a,b]$ 中任意有限个互不相叠的闭区间 $[a_1,b_1],\cdots,[a_n,b_n]$, 只要 $m\left(\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,b_k]\right)<\delta$, 总有 $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

（2） $f(Z)$ 必然也是零测集. 原因如下: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 δ 为以上定义中 (由 $\varepsilon/2$ 以及 f 确定) 的常数. 由 (外) 测度定义, 可以找到开集 $Z\subset G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\subset[a,b]$ 使得 $mG<\delta$, 其中 (a_n,b_n) 是开集 G 的构成区间. 有

$$f(Z)\subset f(G)=f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right)\subset f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f([a_n,b_n]).$$

由外测度的单调性以及次可加性, 相应地有关于外测度的不等式

$$m^*(f(Z))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f([a_n,b_n]))$$

由闭区间上连续函数的最大最小值定理, 存在 $c_{n,min}, c_{n,max} \in [a_n, b_n]$, 使得

$$f([a_n, b_n]) = [f(c_{n,min}), f(c_{n,max})],$$

从而知 $f([a_n, b_n])$ 实际是可测集.

记 $I_n = [a_n, b_n]$, J_n 为以 $c_{n,min}, c_{n,max}$ 为端点的闭区间, 那么 $J_n \subset I_n$. 由于 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 互不相交, 所以对任意 $n \in \mathbb{N}$, $J_1, \cdots, J_n$ 构成 n 个互不交叠的闭区间, 并且满足

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = mG \leqslant \delta,$$

由 f 的绝对连续性, 有

$$\varepsilon/2 > \sum_{k=1}^{n}(f(c_{k,max}) - f(c_{k,mmin})) = \sum_{k=1}^{n} m(f([a_k, b_k])).$$

由 n 的任意性 (或者说令 $n \to \infty$) 有

$$\varepsilon > \varepsilon/2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(f([a_k, b_k])) \geqslant m^*(f(Z)) \geqslant 0.$$

由 ε 的任意性, 得 $0 = m^*(f(Z)) = m(f(Z))$, 即 $f(Z)$ 是零测集.

□

2.（10 分）请叙述可测集 E 上可测函数的定义, 并证明: 若 $f(x), g(x)$ 是 E 上可测函数, 并且 $f(x) > 0$, 那么 $h(x) := f(x)^{g(x)}$ 也是可测函数.

解答 可测集 E 上可测函数的定义: 称定义在可测集 E 上的实值函数 f 是可测的, 若对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 集合

$$E(f > \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > \alpha\}$$

都是可测集.

对一个一般的取值恒正的函数 $F(x)$, 由于有

$$E(F > \alpha) = \begin{cases} E(\ln F > \ln\alpha), & \alpha > 0, \\ E, & \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

所以 F 与 $\ln F$ 有相同的可测性. 故要证明 $h(x) = f(x)^{g(x)}$ 是可测函数, 只要证明 $\ln h(x) = g(x) \cdot \ln f(x)$ 可测即可. 由于 f 可测, 所以 $\ln f(x)$ 也是可测的. 由于两个可测函数的代数运算所得的函数也是可测的, 所以 $\ln h(x)$ 是可测函数. □

3.（10 分）设 $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, 请问两个关系式

$$L^p(E) \subset L^q(E), \quad L^q(E) \subset L^p(E)$$

是否必成立其一? 若是, 请证明; 若否, 请举反例.

解答 不一定.

反例每个 3 分, 包括但不限于下面的例子:

取 $E = (0, +\infty)$, $f(x) = x^{-1/p}\chi_{(1,\infty)}$, 那么对于 $p < q$, 有

$$f \in L^q, \quad f \notin L^p,$$

即有 $L^p \not\subset L^q$.

而对于 $g(x) = x^{-1/q}\chi_{(0,1)}$ 那么

$$g \in L^p, \quad g \notin L^q,$$

从而有 $L^q \not\subset L^p$. □

4.（10 分）设 $f, f_n \in L^p(E)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, E 是可测集. 请分别叙述

（1）$\{f_n\}$ 依测度收敛于 f;

（2）$\{f_n\}$ 依范数收敛于 f

的定义. 请问这两个概念是否有包含关系? 若有, 请给出证明; 若无, 请给出反例.

注意, 这里说的某概念 (相关事物的全体记作 A) 包含另一个概念 (相关事物的全体记作 B) 指的是, $A \supset B$.

解答 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f 指的是: 对任意 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

$\{f_n\}$ 依范数收敛于 f 指的是:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}m\right)^{1/p} = 0.$$

依范数收敛的概念包含了依测度收敛, 即若 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f, 则必然有 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f.

证明如下: 对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned} mE(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) &= mE(|f_n - f|^p \geqslant \varepsilon^p) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^p}\int_E \varepsilon^p \cdot \chi_{E(|f_n - f|^p \geqslant \varepsilon^p)} \,\mathrm{d}m \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\int_E |f_n - f|^p \cdot \chi_{E(|f_n - f|^p \geqslant \varepsilon^p)} \,\mathrm{d}m \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}m = \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p}. \end{aligned}$$

所以, 若 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$, 从而有

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\|f_n-f\|_p^p}{\varepsilon^p}=0.$$

以下不计分. 但如果本小问的分数没有拿满, 以下可最高赋 2 分.

反过来是不成立的. 例如, 取 $E=[0,1]$, $f=0$. 对于 $L^2(E)$ 中的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & x\in(0,1/n),\\ 0, & x\in[1/n,1]\cup\{0\}.\end{cases}$$

容易看出 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 但不依范数收敛于 f. □

四、证明题：本题共 2 小题，每题 10 分，共 20 分。请写出详细证明过程。

1. (10 分) 已知对于任意非奇异线性变换 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 以及任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 有 $m(T(E))=|\det T|\cdot mE$, 这里的 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度 (**注意, 这是题目给的已知结论, 不需要你证明**).

现设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 即 f 是 $\mathbb{R}$ 上勒贝格可积函数, $a>0$ 为常数.

(1) 证明非负数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}n^{-a}|f(nx)|\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-a}f(nx)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立.

解答

(1) 由于 f 是 $\mathbb{R}$ 上勒贝格可积函数, 所以 $|f|$ 也是 $\mathbb{R}$ 上勒贝格可积函数. 考虑 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的非奇异线性变换 $x\mapsto y=nx$, 那么 $\mathrm{d}y=n\mathrm{d}x$, 于是有

$$\int_{\mathbb{R}}n^{-a}|f(nx)|\,\mathrm{d}x=n^{-a}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|\,\frac{1}{n}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{n^{1+a}}\int_{\mathbb{R}}|f|\,\mathrm{d}m.$$

对上式关于 n 求和, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}n^{-a}|f(nx)|\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}\int_{\mathbb{R}}|f|\,\mathrm{d}m=\|f\|_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}.$$

由于 $a>0$, 上述等式右边的级数收敛, 亦即等式左边的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}n^{-a}|f(nx)|\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 记这个级数的和为 C. 对于上述等式左边的级数, 由非负可测函数项级数的逐项积分定理知

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}n^{-a}|f(nx)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-a}|f(nx)|\,\mathrm{d}x.$$

于是 $g(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-a}|f(nx)|$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可积函数, 从而几乎处处有限, 在这些点上, 非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-a}|f(nx)|$ 的通项必须趋于零, 即

$$n^{-a}|f(nx)|\xrightarrow{\text{a.e.}}0\ (n\to\infty),$$

亦即 $n^{-a}f(nx)\xrightarrow{\text{a.e.}}0\ (n\to\infty)$.

□

2. (10 分) 设基本集为 $X=\mathbb{R}^n$, 以下我们考虑的集合都是它的子集.

(1) 请证明勒贝格外测度的正则性: 对任意集合 $E\subset X$, 存在 G_δ-集 A, 使得 $A\supset E$ 且 $mA=m^*E$.

(2) 对于某个集合 $E\subset X$, 若存在勒贝格可测集 $E_0\supset E$, 满足 $mE_0<\infty$ 与 $mE_0=m^*E+m^*(E_0\setminus E)$, 请证明 E 必然也是勒贝格可测集.

解答

(1) 由外测度定义, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在开集 G_n 使得 $E\subset G_n$, 且 $mG_n\leqslant m^*E+\dfrac{1}{n}$. 令 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 则 A 为一个 G_δ-集, 且 $E\subset A$. 由 (外) 测度的单调性, 有

$$m^*E\leqslant m^*A=mA\leqslant mG_n\leqslant m^*E+\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$, 则有 $m^*E=mA$.

(2) 由第 (1) 问知, 对于集合 $E, E_0\setminus E$, 分别存在 G_δ-集 $A_1\supset E$, $A_2\supset E_0\setminus E$, 使得

$$mA_1=m^*E\leqslant mE_0<\infty,$$
$$mA_2=m^*(E_0\setminus E)\leqslant mE_0<\infty.$$

那么 $A_1\cup A_2\supset E_0$, 并且有

$$mE_0\leqslant m(A_1\cup A_2)\leqslant mA_1+mA_2=m^*E+m^*(E_0\setminus E)=mE_0.$$

故上式中的不等号都必须是等号, 即有

$$mE_0 = m(A_1 \cup A_2) = mA_1 + mA_2.$$

由 $m(A_1 \cup A_2) = mA_1 + mA_2$, 以及他们测度都有限知 $m(A_1 \cap A_2) = 0$, 即 $A_1 \cap A_2$ 是零测度集. 又由 $mE_0 = m(A_1 \cup A_2)$ 以及 $E_0 \subset A_1 \cup A_2$ 有 $A_1 \cup A_2 = E_0 \cup F$, 其中 $F = (A_1 \cup A_2) \setminus E_0$ 为零测度集. 于是,

$$A_1 \setminus E \subset ((A_1 \cup A_2) \setminus E_0) \cup (A_1 \cap A_2)$$

为零测度集, 从而 $E = A_1 \setminus (A_1 \setminus E)$ 为可测集.

$\square$